UDC 517.95

ОБ УСТРАНИМЫХ МНОЖЕСТВАХ РЕШЕНИЙ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Н.Г.БАЙРАМОВА
Бакинский Государственный Университет
ibvag47@mail.ru

В статье рассматривается задача Неймана для недивергентных эллиптических уравнений второго порядка с младшими членами и доказывается достаточное условие устранимости компакта.

Ключевые слова: эллиптическое, устранимость, недивергентный, вырождающийся.

В ограниченной области $D \subset R^n$, $n \geq 3$ рассмотрим следующую краевую задачу

$$L_u = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x) u_{x_i} + c(x) u = 0 \text{ в } D \tag{1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_{\partial D \setminus E} = 0, \tag{2}$$

где ∂D граница области D, E некоторый компакт множество лежащее на ∂D, а $\frac{\partial}{\partial \nu}$-означает производную по конормали. Назовем множество E устранимым относительно задачи Неймана для уравнения (1) в $C_\omega^{0,\lambda}(D)$, $0 < \lambda < 1$ если из

$$L_u = 0,\ x \in D \setminus E,\ \frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_{\partial D \setminus E} = 0,\ u(x) \in C_\omega^{0,\lambda}(D), \tag{3}$$

следует, что $u(x) \equiv 0$ в D.

Здесь через $C_\omega^{0,\lambda}(D)$ обозначает банахово пространство функций $u|x|$ заданных на D с конечной нормой

$$\|u\|_{C^{0,\lambda}_{\omega}(D)} = \sup_{x\in D}\omega(x)|u(x)| + \sup_{\substack{x,y\in D\\ x\neq y}}\frac{|u(x)-u(y)|\omega}{|x-y|^{\lambda}}.$$

Здесь $\omega(x)$ измеримая, неотрицательная функция из $L_{1,loc}(D)$, удовлетворяющая условию Макенхоупта [1].

Относительно коэффициентов предположим выполненными следующие условия:

$$\gamma|\xi|^2\omega(x) \le \sum_{i,j=1}^{n} a_{il}(x)\xi_i\xi_j \le \gamma^{-1}\omega(x)|\xi|^2,\ \ \xi\in E_n \tag{4}$$

$$\omega(x)|a_{ij}(x)-a_{ij}(y)| \le k_1|x-y| \tag{5}$$

$$|b_i(x)| \le b_0;\ -b_0 \le c(x) \le 0. \tag{6}$$

Здесь $i,j=\overline{1,n}, k_1, b_0 > 0$ константы, а γ константа $\gamma \in (0,1]$.

В данной работе доказывается достаточное условие устранимости компакта относительно задачи (1)-(2) в пространстве $C^{0,\lambda}_{\omega}(D)$. Для уравнения Лапласа соответствующий результат был получен Л.Карлесоном [2]. В случае задачи Неймана для уравнения Лапласа в кусочно-гладких областях, вопрос об устранимости исследован в [3], [4]. Вопросы устранимости для решений первой краевой задачи для эллиптических и параболических уравнений рассмотрены в работе [5]. В работе [6] установлены условия устранимости компакта в пространстве непрерывных функций.

Обозначим через $B_R(z)$ и $S_R(z)$, соответственно, шар $\{x:|x-z|<R\}$ и сферу $\{x:|x-z|=R\}$ радиуса R с центром в точке $z\in R^n$. $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ производная по конормали, определенная равенством

$$\frac{\partial u(x)}{\partial \nu} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\cos(n,x_j),$$

где $\cos(n,x_j)$, $j=\overline{1,n}$ направляющие косинусы единичной внешней нормали к поверхности.

Через $m_H^S(A)$ будем обозначать меру Хаусдорфа множества A порядка $s>0$.

Далее запись $C(\cdot)$ означает, что положительная константа C зависит от содержимого скобок.

Зафиксируем произвольную $\varepsilon>0$ и множество E покроем шарами радиусов r_i таким образом,

$$\sum_{i=1}^{m} r_i^{\,n-2+\alpha} < \varepsilon. \tag{7}$$

Рассмотрим сферы $S_R(0)$ и $S_{2R}(0)$. Через $\sum_i$ обозначим поверхности, отделяющие шар радиуса $2r_i$ в области D и выделяющие особые точки ∂D, таким образом, чтобы

$$\int_{\Sigma_{i\omega}} \left|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right| ds \le C_1 \underset{r_i<r<2r_i}{osc} u \cdot r_i^{n-2}, \tag{8}$$

где зависит от γ и n. Отсюда, проведя некоторые вычисления и учитывая, что $u(x) \in C_\omega^{0,\lambda}(D)$, получим

$$\int_{\Sigma_k} \omega \left|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right| ds \le C_1 r_k^{n-2+\lambda}, \ \ k = 1,2...$$

Существование такой поверхности следует из [7]. Из условий на коэффициенты следует, что почти всюду в D существует ограниченные производные от a_{ij}. Не теряя в общности, можно предположить, что такие производные существуют всюду в D.

Пусть D_Σ открытое множество, расположенное в $D \setminus E$, граница которого состоит из объединения $\sum_i$ и Γ, где $\sum = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Sigma_k$, $D_k = D \bigcap B_{2rk}(x^k)$, $k = 1,2,....,\Gamma = \partial D \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} D_k$, D_k^+ есть часть D_k остающаяся после перемещения точек расположенных между $\sum$ и $S_{2rk}(x^k)$; $k = 1,2...$. Обозначим $D_{\Sigma'}$ произвольно связанную компоненту D_Σ и рассмотрим эллиптический оператор дивергентной структуры

$$B = \sum_{i.\,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_j}\right).$$

Согласно формуле Грина для любых функций $z(x)$ и $W(x)$ принадлежащих пересечению $C^2(D'_\Sigma) \bigcap C^1(\overline{D'}_\Sigma)$ мы имеем

$$\int_{D'_\Sigma} (zBW - WBz)dx = \int_{\partial D'_\Sigma} \left(z\frac{\partial W}{\partial \nu} - W\frac{\partial Z}{\partial \nu} ds\right), \tag{9}$$

Как известно $u(x) \in C^1(\overline{D'}_\Sigma)$ (см. [8]). Из (9) специально выбирая функцию z и W, получаем

$$\int_{D'_\Sigma} B(\omega u^2)dx = 2\int_{\partial D'_\Sigma} \omega u \frac{\partial u}{\partial \nu} ds + \int_{\partial D_\Sigma} \omega_{x_i} u^2 ds.$$

Так как мы рассматриваем ограниченные решения $|u(x)| \le M < \infty$, $x \in D$, то с учетом (7) и того, что

$$\int\limits_{\Sigma_k} \omega \left|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right| ds \le C_1 r_k^{n-2+\lambda}, \quad k = 1,2,... \tag{10}$$

имеем

$$\int\limits_{D'_\Sigma} B(\omega u^2) dx \le 2Ma_0 \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{\Sigma_k} \omega \left|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right| ds \le 2Ma_0 C_1 \sum_{k=1}^{\infty} r_k^{n-2+\alpha} < C_2 \varepsilon . \tag{11}$$

Кроме того

$$Bu = Lu + \sum_{i=1}^{n} d_i(x) u_{x_i} - c(x)u ,$$

где

$$d_i(x) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial a_{ij}(x)}{\partial x_j} - b_i(x),$$

Учитывая, что с другой стороны

$$B(\omega u^2) = 6u\omega B(u) + 2\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_{x_i} u_{x_j} +$$

$$+ (2n+1)\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_{x_j} \omega_{x_i} + \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_i} u \omega_{x_j} + \sum_{i,j=1}^{n} u \omega_{x_i x_j}$$

и то, что в силу условий (4)-(6)

$$|d_i(x)| \le d_0 < \infty; \quad i = 1,...n,$$

из (11) мы имеем

$$2\int\limits_{D'_\Sigma} u \sum_{i=1}^{n} d_i(x) u_{x_i} dx - 2\int\limits_{D'_\Sigma} u^2 c(x) dx + 2\int\limits_{D'_\Sigma} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \omega u_{x_i x_{ij}} dx < C_2 \varepsilon.$$

Отсюда для любых $\alpha > 0$ применяя неравенство Коши мы имеем

$$2\gamma \int\limits_{D'_\Sigma} \left|\omega \nabla u^2\right| dx < 2d_0 \int\limits_{D'_\Sigma} \sum_{i=1}^{n} \omega |u| \left|u_{x_i}\right| dx + C_2\varepsilon \le d_0 \alpha \int\limits_{D'_\Sigma} \left|\omega \nabla u_{x_i}\right|^2 dx +$$

$$+ \frac{d_0 n}{\alpha} \int\limits_{D'_\Sigma} \omega u^2 dx + C_2 \varepsilon \le d_0 \alpha \int\limits_{D'_\Sigma} \omega |\nabla u|^2 dx + \frac{d_0 \cdot n \cdot M^2 mes_n D}{\alpha} + C_2 \varepsilon . \tag{12}$$

Выбирая $\alpha = \dfrac{\gamma}{d_0}$ из (12) получаем

$$\int\limits_{D'_\Sigma} \omega |\nabla u|^2 dx \le C_3, \qquad (13)$$

где C_3 зависит от M, d_0, γ, $mes_n D$, n. Не теряя в общности, считаем, что $\varepsilon \le 1$. Отсюда имеем

$$\int\limits_{D} \omega(x) |\nabla u|^2 dx \le C_4,$$

где C_4 зависит от

Далее используя (7) и (8) получаем

$$\int\limits_{D'_\Sigma} e^{2Au} u \sum_{i,j=1}^{n} \omega(x) a_{ij}(x) u_{x_i x_j} dx = -\frac{1}{2A}\left[\int\limits_{D'_\Sigma} e^{2Au} \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_{i,j=1}^{n} \omega(x) \frac{\partial a_{ij}(x)}{\partial x_j} u_{x_i} dx + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{D'_\Sigma} e^{2Au} u \sum_{i=1}^{n} b_i(x) u_{x_i} dx + \int\limits_{D'_\Sigma} e^{2Au} c(x) u dx \right], \qquad (14)$$

для любого $A \in [0,1]$. Используя условия (4), (6) и оценку (13) получим

$$\lim_{A \to 0} \int\limits_{D'_\Sigma} e^{2Au} \left[\sum_{j=1}^{n} \omega(x) \frac{\partial a_{ij}(x)}{\partial x_j} u_{x_i} + b_i(x) u_{x_i} + c(x) u \right] dx = 0.$$

Отсюда по теореме Лебега

$$\int\limits_{D'_\Sigma} \left[\sum_{j=1}^{n} \omega(x) \frac{\partial a_{ij}(x)}{\partial x_j} u_{x_i} + b_i(x) u_{x_i} + c(x) u \right] dx = 0. \qquad (15)$$

Используя (7), (8) и (15) имеем

$$\int\limits_{D'_\Sigma} \sum_{i,j=1}^{n} \omega(x) a_{ij}(x) u_{x_i} u_{ij} dx \le C_5 \varepsilon.$$

Из последнего неравенства в силу (4) вытекает утверждение, что $u \equiv const$. Итак, доказана следующая теорема

Теорема 1. *Пусть D ограниченная область в R^n, $n \ge 2$, $E \subset \overline{D}$ некоторый компакт. Относительно коэффициентов выполняются условия (4)-(6). Тогда для устранимости компакта E относительно задачи (1), (2) в пространстве $C_\omega^{0,\lambda}(D)$, достаточно, что*

$$m_H^{n-2+\lambda}(E) = 0. \qquad (16)$$

Рассмотрим смешанную краевую задачу для недивергентного эллиптического уравнения второго порядка. Пусть Γ_1 и Γ_2 два таких множества, что $\partial D \setminus E = \Gamma_1 \bigcup \Gamma_2$ и $\Gamma_1 \bigcap \Gamma_2 = \varnothing$. Тогда краевая задача

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x) u_{x_i} + c(x) u = 0 \text{ в } D, \tag{17}$$

$$u\Big|_{\Gamma_1} = 0, \ \frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_{\Gamma_1} = 0 \tag{18}$$

является смешанной краевой задачей. Решение смешанной краевой задачи (17), (18) ищем из классов $C^2(D) \bigcap C^0(\overline{D} \setminus E)$ и $\{W_2^2(D) \bigcap C^0(\overline{D} \setminus E); 0 \le u(x) \le k\}$

Теорема 2. *Пусть D ограниченная область в R^n, $n \ge 2$, $E \subset \overline{D}$ некоторый компакт. Относительно коэффициентов выполняются условия (4)-(6). Тогда для устранимости компакта E относительно задачи (17), (18), достаточно, чтобы $m_H^{n-2}(E) < \infty$.*

Теорема доказывается теми же идеями, что и в теореме 1.

Теми же методами, что и выше, можно рассмотреть один класс квазилинейных эллиптических уравнений второго порядка. Рассмотрим в области $D \subset R^n$, $n \ge 2$ следующее уравнение

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x) u_{x_i} + c(x) u + b(x, u, \nabla u) = 0. \tag{19}$$

Здесь $a_{ij}(x)$ измеримые ограниченные функции удовлетворяющие условию (4), $b_i(x)$, $c(x)$ удовлетворяют условиям (6), а

$$|b(x, u, \nabla u)| \le g(u) |\nabla u|, \quad \int_0^a g(u) du < \infty, \ a < \infty. \tag{20}$$

Для уравнения (19) рассмотрим задачу Неймана:

$$Lu = 0, \ x \in D \setminus E, \ \frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_{\partial D \setminus E} == 0. \tag{21}$$

Решение задачи (21) ищем в классе $W_2^1(D) \bigcap C_\omega^{0,\lambda}(\overline{D})$, $|u| \le k$.

Теорема 3. *Пусть D ограниченная область в R^n, $n \ge 2$, $E \subset \overline{D}$ некоторый компакт и относительно коэффициентов уравнения (19) выполняются условия (4), (6), (19). Тогда для устранимости компакта E относительно задачи (21) достаточно, что $m_H^{n-2+\lambda}(E) = 0$.*

Доказательство. Введем функцию

$$\vartheta(x) = \int_0^{u(x)} \exp\left(\frac{1}{\lambda_0} \int_0^t g(\tau) d\tau \right) dt.$$

Аналогично [8] устанавливается, что эта функция является субрешением линейного оператора

$$L_1 u = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right).$$

Далее, следуя доказательству теоремы 1, получаем $\vartheta(x) \equiv const,$ т.е. $u(x) \equiv 0,$ что и доказывает теорему.

Теорема 4. При выполнении условий теоремы 3, для устранимости компакта E относительно смешанной краевой задачи для уравнения (19), достаточно, чтобы

$$m_H^{n-2}(E) < \infty.$$

Теорема доказывается близкими идеями как и в теоремах 3 и 1.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ganiello S., Wheeden R. "Weighted Poincare and Sobolev inequalities and estimates for weighted Peans maximal functions" American journal of Mathematics, v. 167, №5, pp. 1191-1221, 1985
2. Carleson L. Selected problems on exceptional sets. D.Van. Nostrand company, Toronto-London-Melbourne, 1967, 126 p.
3. Моисеев Е.И. О задачах Неймана в кусочно-гладких областях. Дифф. уравнения, 1971, т. VII, №9, с.1655-1656.
4. Моисеев Е.И. О существовании и не существовании граничных множествах задачи Неймана. Дифф. уравнения, 1973, т.IX, №5, с.901-911.
5. Ландис Е.М. К вопросу о единственности решения первой краевой задачи для эллиптических и параболических уравнений второго порядка. Успехи мат. наук, 1978, т.33, №3, с.151.
6. Кондратьев В.А., Ландис Е.М. Качественная теория линейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка. Итоги науки и техники. «Современные проблемы математики». Фундаментальные направления. Дифференциальные уравнения, т.3, М., ВИНИТИ, 1988, с.99-212.
7. Aliyev O.S. On removable sets of solutions of degenerated elliptic equations with minor terms. Вестник BDU, 3, 2012, c.68-79
8. Gilbarg D., Trudinger N.S. Elliptic partial differential equations of second order. Berlin-Heidelberg-New York, Springer-Verlag, 1977, 401 p.
9. Ландис Е.М. Уравнения второго порядка эллиптических и параболических типов. М.: Наука, 1971, 288 с.

İKİNCİ TƏRTİB CIRLAŞAN ELLİPTİK TƏNLİKLƏR ÜÇÜN SƏRHƏD MƏSƏLƏLƏRİNİN ARADAN QALDIRILA BİLƏN ÇOXLUQLARI

N.Q.BAYRAMOVA

XÜLASƏ

Məqalədə kiçik hədlərə malik qeyri-divergent ikinci tərtib elliptik tənliklər üçün Neyman məsələsinə baxılır. Kompaktın aradan qaldırıla bilməsi üçün kafi şərt alınmışdır.

Açar sözlər: elliptik, aradan qaldırıla bilən çoxluq, qeyri-divergent, cırlaşan.

ON REMOVABILITY SETS OF SOLUTIONS FOR BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR THE SECOND ORDER DEGENERATED EQUATIONS

N.G.BAYRAMOVA

SUMMARY

The paper considers the problem of Newmann for nondivergent elliptic equations of the second order with minor terms. The sufficient condition for removability compact is proven.

Key words: elliptic, removability, nondivergent, degenerate.

Принято в редакцию: 05.03.2013 г.
Подписано к печати: 06.03.2013 г.